◆ ガンマ関数について ◆ 北野 利一 ◆ 2005 年 11月 7日

Pierson-Moskowitz スペクトルは，次式に示すような波浪スペクトルの代表的なものの１つである．

S（f）＝ α／f^5 ＊exp(- β／f^4) ... (1)

スペクトルのモーメント量を用いれば，代表波高や代表周期と結びつけることができる（合田，1998）．
P-M スペクトルのモーメント量 mk は，次式のようにガンマ関数が現れる．

mk ＝ integrate f^k ＊ S（f） with respect to f from zero to infinity
＝ α／β^(1 - k/4) ＊Γ(1 - k/4)／4 ... (2)

せっかくですから，特殊関数の１つであるガンマ関数について，ここで，少し調べておきましょう．

【１】まずは，R にてガンマ関数の値を算出してみる．

```
> gamma(5)
[1] 24
> prod(1:4)
[1] 24
```

上述の例のように，ガンマ関数の変数に自然数をとれば，その自然数から１を引いた値の階乗に一致する．
そのため，ガンマ関数は階乗の補完関数とみる人も多い（４．５！と表記するのは誤りですが，その意味はわかるでしょ）．また，上の計算を次式のように確認することも可能である．

```
> gamma(4)*4
[1] 24
```

ところで，半整数の値は，どのようであるだろうか？

```
> gamma(4.5)
[1] 11.63173
> gamma(.5)
[1] 1.772454
```

この値を見て，ピン！とくる人は多くはないかもしれないが，次の結果の値は，お馴染みの値である．

```
gamma(.5)^2
```

以上を整理し，数学的に言えば，次のとおりである．

【２】ガンマ関数は，正の実数 x に対して，以下のように定義される．

Γ(x) ＝ integrate t^(x-1) * exp(-t) with respect to f from zero to Infinity ... (3)

特に，x = 1 および 1/2 の場合，

Γ（１） ＝ 1 ... (4)
Γ（1/2） ＝ √π ... (5)

であることは，容易に確かめられる（ R を用いずに，定義式を基に手計算により確認せよ）．後者を得るための積分は非常に重要である．また，ガンマ関数の性質として，

Γ（x＋１） ＝ xΓ（x） ... (6)

という関係が成立することも，部分積分により，確認できる．従って，自然数 n に対して，階乗（！）とガンマ関数の関係は以下のように成立する．

Γ（ｎ＋１） ＝ ｎ！ ...(7)
Γ（ｎ＋ 1/2）＝ （２ｎ）！／ｎ！／２＾（２ｎ）＊√π ...(8)

【３】ガンマ関数を図示

```
plot(2:6, cumprod(1:5), xlim=c(0,6))
curve(gamma, 0.01,6, add=T)
```

たしかに，“補完”を実感できる．

【４】（－３．２）！＝ ？ （表現としては誤りですが，．．．言いたいことはわかるでしょ）

R にてさっそく実行，．．．

```
> gamma(-3.2)
[1] 0.6890564
```

さて，この値はどのようにして得られるのでしょうか？

ｘ が正の実数であることは，式（1）の積分をそのまま実行する際に必要な条件であるが，式（6）は，任意の実数 ｘ に対して適用できる．

Γ（ｘ）＝Γ（ｘ＋１）／ｘ ...(9)

従って，－ｎ ＜ ｘ ＜ １－ｎ （ｎ＝自然数）の時，

Γ（ｘ）＝Γ（ｘ＋ｎ）／（ｘ（ｘ＋１）（ｘ＋２）．．．（ｘ＋ｎ－１）） ...(10)

が成立する．これを用いれば上の計算を確認できる．

```
> gamma(4 -3.2)/(-3.2)/(1 -3.2)/(2 -3.2)/(3 -3.2)
[1] 0.6890564

x <- seq(-4,4.2, by=.005)
x[match(-4:0, x)] <- NA

plot(x, gamma(x), xlim=c(-4,4), ylim=c(-5,6), xlab="x", ylab="Gamma(x)", type="l")
points(2:4, cumprod(1:3))

curve(gamma(x+1)/x, -.99, -.01, add=T, col="red")
curve(gamma(x+2)/x/(x+1), -1.99, -1.01, add=T, col="red")
curve(gamma(x+3)/x/(x+1)/(x+2), -2.99, -2.01, add=T, col="red")
curve(gamma(x+4)/x/(x+1)/(x+2)/(x+3), -3.999, -3.01, add=T, col="red")

abline(h=0, v=0, lty=3)
```

【５】スターリングの公式

十分大きな値 ｘ（実数）および ｎ（自然数）に対して，次式のように漸近展開が可能である．

Γ（ｘ）～ √（２π／ｘ）＊ｘ＾ｘ＊ exp（－ｘ）
ｎ！ ～ √（２π＊ｎ）＊ｎ＾ｎ＊ exp（－ｎ）

前節のグラフでは，ｘ は十分に大きいとは言えないが，書き加えてみる．

```
curve(sqrt(2*pi/x)*x^x*exp(-x), 0,4.5, col="red", lty=2, add=T) # Stirling formula
```

ガンマ関数は爆発的に増大するため，このような場合，対数をとって表すのが一般的である.

```
plot(2:11, log(cumprod(1:10)), xlim=c(0,11), xlab="x", ylab="log(G(x))")
curve(lgamma, .01, 11.5, add=T)
curve(log(2*pi)/2 + (x -.5)*log(x) - x, .5, 11.5, lty=2, col="red", add=T)
```

このような図を見ると，ガンマ関数（の対数）の変化率についての興味がわいてくる.

```
log(prod(1:3)*c(1,4)) -> vals
segments(c(4,5), vals, c(5.5, 5.5), vals, lty=3)
segments(c(4,5), c(1,1), c(4,5), vals, lty=3)
```

ガンマ関数（の対数）の変化率を表す関数は，ディガンマ関数 ψ (digamma in R) である. つまり，

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \left(d\Gamma(x)/dx\right) / \Gamma(x) \qquad \ldots (11)$$

具体的に図示して表せば，以下のとおり.

```
plot(2:10 +.5, diff(log(cumprod(1:10))))
curve(digamma, 0, 11, add=T)
```

【６】蛇足？（関数の定義域の拡張について）

上述にて，ガンマ関数の定義域を負の実数への拡張を行いました. ついでに，よく知られる対数関数も負の実数の領域に拡張できるのでしょうか？さっそく，R で実行すると，. . .

```
> log(-2.3)
[1] NaN
Warning message:
NaNs produced in: log(x)
```

できません. 平方根も，通常は正の実数に対してのみ定義されますが，負の実数に対しては，虚数（i）を用いて拡張されることは，みなさんご存知ですね，. . .

```
> sqrt(-2.3)
[1] NaN
Warning message:
NaNs produced in: sqrt(-2.3)
```

対数も，平方根も，いずれも警告メッセージがでました. R は，複素数の演算ができないのでしょうか？
離散フーリエ変換として数値計算分野で有名な FFT を R では，以下のように実行できます.

```
> fft(1:8)
[1] 36+0.000000i -4+9.656854i -4+4.000000i -4+1.656854i -4+0.000000i -4-1.656854i
[7] -4-4.000000i -4-9.656854i
```

上の結果を見るように，R にて，複素数の演算ができないわけではありません. 複素数の演算をしていることを明示する必要があります. つまり，sqrt や log のような数学的関数については，出力の値の型は入力のものに合わせます. したがって，-1 ではなく，-1 + 0i として，入力時に複素平面上の実軸上の値を代入すると，. . .

```
> sqrt(-1+0i)
[1] 0+1i
> log(-1+0i)
[1] 0+3.141593i
```

うまくいきました．ただし，対数については，注意が必要です．

```
> epsi <- 1i/10^16
> log(-1 + epsi)
[1] 0+3.141593i
> log(-1 - epsi)
[1] 0-3.141593i
```

対数に関しては，負の実軸には，表側（ + 0i）と裏側（ - 0i）があるということです．また，上の答えは，
唯一の答えでもありません．

```
> (ans <- log(-1 + epsi))
[1] 0+3.141593i
> exp(ans)
[1] -1+1.224647e-16i
> zapsmall(c(-1, exp(ans), exp(ans + 2i*pi), exp(ans + 4i*pi)))
[1] -1+0i -1+0i -1+0i -1+0i
```

このことから，負の実数 －ｘ + 0i に対する対数の値は，整数 k を用いて，

log（－ｘ）＝log（ｘ）＋ ２π＊ i ＊（2*k + 1） ... (12)

と表せ，答えは無数にあることが想像できる．しかし，このような場合，

log（－ｘ）＝log（ｘ）＋ ２π＊ i ... (13)

を１つの答えとして，代表させても不都合はない（どころか，好都合である）．この値を主値とよぶ．
主値という考え方は，他にも，積分においても現れる．例えば，

integrate sin(x)/x from - infinity to infinity ... (14)

という積分値は，通常の積分で定義できるが，

integrate cos(x)/x from - infinity to infinity ... (15)

という積分値は，通常の積分で定義できないが，上記の主値の考え方により定義できる．このような積分を
主値積分という．なお，上記の積分は，特殊関数 Si（正弦積分），Ci（余弦積分）および Ei（指数積分）
などに結びつくものである（Abramowitz and Stegun, 1965）．

参考文献

合田良実 (1998): 海岸・港湾，二訂版，彰国社，321p.
Abramowitz, M. A. and I. A. Stegun (1965): Handbook of mathematical functions, Dover, 1046p.