

拡張されたベルヌーイの定理（非定常流れ）

渦なし流れにおいて，次式が成り立つ（右辺をゼロとおいて，一般性は失わない）。
 （右辺をゼロとおいた時，左辺の第1項は，定常流のベルヌーイの定理における右辺定数項の役割を果たす，とみればよい）

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho g} + z + \frac{|\vec{u}|^2}{2g} = f(t) \quad (\text{or } = 0, \text{ supposed } f(0) = 0) \quad (1)$$

1) プリント #5 の設問 4) と同様の考えで，式 (1) を導け．なお，流速および外力の各々のベクトル量は，以下のようにポテンシャル量 ϕ および Ω の勾配で表現できることを利用せよ．

$$\vec{u} = \nabla \phi, \quad \vec{F} = \nabla \Omega \quad (\Omega = \vec{g} \cdot \vec{x}) \quad (2)$$

2) 【流体振動の固有周期】 U字管に入れられた水の水面を上下に運動させ，自由振動している．このときの水位 η の振動を表す式を誘導せよ（運動の状況について，スケッチを示すこと）．また，2つの水面の管に沿った距離 L を 90 cm とする時，固有振動周期 T は，いくらとなるか？

海面を進行する水面波 η とその速度ポテンシャル ϕ は，次式のように表せる．

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t); \quad \phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (3)$$

ただし，鉛直座標 y を重力と逆向きを正ととり， h を水深とし，波数 k および角周波数 σ は，

$$k = \frac{2\pi}{L}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

として，それぞれ，波の波長 L と周期 T で表される量である．なお，海面振動の振幅 a が微小であるので，ポテンシャルの振動や流速振動などの振幅も全て微小である．このような波を微小振幅波という．

3) 非圧縮性流体の連続式を満足することを確認せよ．

4) 水平な海底面において，速度ポテンシャルが満たすべき条件は，次式のように表される．この条件の意味すること（海底面の水粒子の運動の特徴）を簡潔に記述せよ．また，この条件を式 (3) で表される水面波のポテンシャル ϕ が満足することを確認せよ．

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

5) 海面において，流速が満たすべき条件は，次式のように表される．微小時間 Δt に対する海面の移動と海面の水粒子の移動の例を図示し，次式の条件を説明せよ．

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

拡張されたベルヌーイの定理において，次の2点から，式 (1) は式 (7) はのように近似できる．

- i) 水面での圧力は大気圧に等しく，ゼロとおくこと，
- ii) 2次量である $|\vec{u}|^2$ は，微小な1次量に対して無視できること（このような操作を線形化という），
 （厳密には，2次量と1次量を比較するために，テーラー展開による議論が必要である）

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta = 0 \quad (\text{at } z = 0) \quad (7)$$

6) 上の議論と同様に，式 (6) で表される海面での条件を近似すれば，どのようになるか？

7) 式 (7) と，前問で得られる海面での条件を用いて，水位 η を消去すれば，速度ポテンシャル ϕ のみが満たすべき式として整理できる．その式を示せ．また，得られた条件式に，式 (3) を代入することにより，波の波数 k と角周波数 σ とが満たすべき関係として，次式が得られることを示せ．

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (8)$$

なお，上式を波の分散関係式をよび，波の進行速度（位相速度）を与える重要な式である．

微小振幅波の特性 (1) 波速

プリント #9 の式(8)の分散関係式を変形すれば, 波速 (= 波の位相速度) C は, 次式で与えられる.

$$C \left(= \frac{L}{T} \right) = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \left(\text{or } C = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{k} \right)^2} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \right) \quad (1)$$

1) 水深 10 m の海において, 波長 70 m の海面波の波速を求めよ.

また, 同じ水深の海において, 波長が 30 m と 100 m の海面波についても, その波速を求めよ.

式(1)による波速の表現では, 波長が与えられる場合には使いやすいが, 周期が与えられる場合には使いにくい. 現実的な状況では, 波長よりも周期が与えられることが多い. さて, どうすればよいか? 以下でそれを検討する.

波長 L に対して, 水深 h が十分に深い場合 ($kh \gg 1$) と十分に浅い場合 ($kh \ll 1$) には, 次式のように関数 \tanh を近似することができる.

$$\tanh kh \cong \begin{cases} 1 & (kh \gg 1) \\ kh & (kh \ll 1) \end{cases} \quad (2)$$

これにより, 波速 C は, 次式のように近似できる.

$$C = \frac{\sigma}{k} = \frac{g}{\sigma} \tanh kh \cong \frac{g}{\sigma} = \frac{gT}{2\pi} (= C_0) \quad \text{for } kh \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{k} \right)^2} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \cong \sqrt{gh} \quad \text{for } kh \rightarrow 0 \quad (4)$$

波速が上式のように近似できる波を, それぞれ, 深海波および極浅海波とよぶ. 特に, 深海波の波速を沖波波速とよび, 記号 C_0 を用いる (また, 沖波の波数を $k_0 (= 2\pi/L_0; L_0 = C_0 T)$ と記す).

2) 水深 20 m の海における周期が 6 s の海面波と, 水深 5 m の海における周期が 12 s の海面波について, それぞれの波速を式(3)あるいは(4)を用いて概算せよ. (注意: 近似式の適用の妥当性を確認すること!)

分散関係式を次式のように変形すれば, “水深および周期が与えられた場合に波速を求める” という問題は, “定数 a が与えられる時, 次式を満たす x を求める” という問題に帰着する (x を求めれば, 波数 k あるいは波長が得られるので, 得られた波長を与えられた周期で除すことにより, 波速は得られる).

$$\left(\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh \Leftrightarrow \right) x = a / \tanh x \quad \left(x = kh, a = \frac{\sigma^2 h}{g} (= k_0 h) \right) \quad (5)$$

この時, 式(5)を次式に示す漸化式として扱い, 点 x_{n-1} を点 x_n に写す変換 (写像) とみれば, 適当な初期値 x_0 (例えば, $k_0 h$; ここで, k_0 は沖波波速により得られる波数) を与えて, 式(5)を満たす逐次近似解が算出できる. これは, 不動点定理 (縮小変換では少なくとも 1 つの不動点が必ずあることを保証) に基づく解法である (図-4 および 図-5 参照).

$$x_n = a / \tanh x_{n-1} \quad (6)$$

なお, 分散関係式の解法は, 一般的には, Newton 法による解法が紹介されている. しかし, 手続きが少し複雑になるので, ここでは, 微分係数の計算を含まない解法を紹介した. Newton 法による解法は, 別の機会に紹介する.

3) 設問 2) での海面波に加え, 水深 10 m の海における周期が 8 s の海面波について, それぞれの波速を式(6)により算出せよ.

4) 水深 30 m の海において, 周期による波速の変化を図示せよ. なお, 深海波および極浅海波の波速を補助線 (漸近線) として, 図中に記せ.

微小振幅波の特性 (2) 圧力分布

拡張されたベルヌーイの定理 (ただし, 2 次量である流速エネルギー項は無視) に, プリント # 10 の式 (3) で表されるポテンシャル ϕ を代入すれば, 圧力は静水圧成分と変動成分の和として, 次式で与えられる.

$$p = \rho g a \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) - \rho g y \left(\text{or} = \rho g (K_p \eta - y); K_p = \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \right) \quad (1)$$

- 1) 圧力の鉛直分布を図示せよ. なお, 静水圧も含めて示すこと.
- 2) 【水圧式波高計の原理】 水深 12 m の海底面に圧力計が設置されている. 計測された圧力変動の振幅が 5.0 kN/m^2 および振動周期が 10 s であった時, 海面波の波高はいくらであるか?
- 3) 水圧式波高計の (長所と) 短所を述べよ.

深海波の速度ポテンシャルは, 次式で与えられる.

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} e^{ky} \sin(kx - \sigma t) \quad (2)$$

- 4) 有限水深での波の速度ポテンシャルにて, $kh \rightarrow \infty$ とすることにより, 式 (2) を導け.

時間の経過とともに x が減少するように伝播する波の波形 η_- とその速度ポテンシャル ϕ_- は,

$$\eta_- = -a \cos(kx + \sigma t); \phi_- = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin(kx + \sigma t) \quad (3)$$

と表される (波形 η_- の符号に注意せよ! すなわち, 式 (3) の波とプリント # 10 の式 (3) の波の違いは, 位相だけではない. その原因はプリント # 10 の式 (7) に由来する). また, 時間の経過とともに x の値が減少するように伝播する波形および速度ポテンシャル (プリント # 10 の式 (3) で表されるもの) を, 改めて η_+ および ϕ_+ と表せば, 原点にある直立壁に波形 η_- が入射し, その反射波として波形 η_+ が壁から発生している状況 (ここでは, 壁におけるエネルギー損失がないものとして, 反射率を 1 としている) を考察することができる. 入射波と反射波を重ね合わせてできる波を重複波とよび (他方, 入射波などの単一な方向に進行する波を進行波とよぶ), その波形 η_s および速度ポテンシャル ϕ_s は以下のように得られる.

$$\eta_s = \eta_- + \eta_+ = 2a \sin kx \sin \sigma t \quad (4)$$

$$\phi_s = \phi_+ + \phi_- = \frac{2ag}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin kx \cos \sigma t \quad (5)$$

- 5) 深海波の場合, 重複波の速度ポテンシャルが次式のように与えられることを示せ.

$$\phi_s = \frac{2ag}{\sigma} e^{ky} \sin kx \cos \sigma t \quad (6)$$

- 6) 深海波の場合, 圧力の変動成分 \tilde{p} を水頭による表現をすれば, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{\tilde{p}}{\rho g} = 2a e^{ky} \cos kx \cos \sigma t \quad (7)$$

- 7) 式 (6) で与えられる流れ場の流線を描け. 水面波形 η_s も描くこと. なお, 直立壁はどこにあると考えればよいか? (海底面では流速の鉛直成分はゼロである. 同じ理由で, 直壁面では流速の水平成分はゼロである)

式 (6) の流れ場は非定常であるが, ポテンシャル関数 ϕ_s は, 空間座標のみに依存する項

$$\phi'_s = \frac{2ag}{\sigma} e^{ky} \sin kx \quad (8)$$

と時間のみに依存する項の変数分離の形式で与えられている. そのため, 時間変動項を無視して, 空間変動項 ϕ'_s による流線を描けばよい. あるいは, ポテンシャル関数 ϕ'_s での振幅 a を $a' = a \cos \sigma t$ とみて, 関数 ϕ'_s には時間変動項が含まれている, とみなせば, 式 (8) は式 (6) に一致する.

微小振幅波の特性 (3) 流線

1) 深海波の重複波について, 前問7) で得られる流線を変形すれば, 流れ関数 ψ'_s は, 次式のように表現できることを示せ.

$$\psi'_s = \frac{2ag}{\sigma} e^{ky} \cos kx \quad (1)$$

2) プリント #12 の式(8) と上式により, 深海波の重複波の流れは, 以下の複素速度ポテンシャルとして整理できる. これを確認せよ.

$$\frac{W'_s}{iC} = 2a \exp(-ikz) \quad (2)$$

有限水深の重複波の場合, 複素速度ポテンシャルは次式で与えられる.

$$\frac{W'_s}{iC} = 2a \frac{\sinh k(h-iz)}{\sinh kh} \quad (3)$$

3) 式(3) のポテンシャルがコーシー・リーマンの関係を満たすことを確認し, その流線を図示せよ. なお, 深海波の場合と同様, 速度ポテンシャルから流線を求め, それを変形して流れ関数を得ることができる.

複素関数論によれば, 関数が正則であれば, 実軸上の実関数を複素平面上の複素関数に拡張できる. 例えば,

$$\exp x \rightarrow \exp z = \exp(x+iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

というように, 指数関数は正則であるので, 実関数 $\exp(x)$ を, 虚軸 iy も含めた関数として, 複素関数に拡張してよい. これを解析接続という. この考えにもとづけば, 次式のように, 実軸上の正弦関数を複素平面に接続して, 式(3)あるいは, プリント #12 の式(5)の主要部が容易に得られる. あとは, 座標軸の平行移動を含め, 境界条件を満たすように, 定数部を調整すればよい.

$$\sin kx \left(= \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \rightarrow \sin kz = i \sinh(-ikz) = \cosh ky \sin kx + i \sinh ky \cos kx$$

進行波の流線を考えるにあたり, 時間軸を水平空間軸に含ませるため, 波速と同じ速度速度で移動する座標系から波を見る, すなわち,

$$x' = x - Ct \quad (\text{or } kx' = kx - \sigma t) \quad (4)$$

とすれば, 進行波の速度ポテンシャルは, 次式のように, プリント #10 の式(3) に項 $-Cx'$ が付加される.

$$\phi'_p = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin kx' - Cx' \quad (5)$$

また別の見方をすれば, 進行波の速度ポテンシャル ϕ'_p は, 重複波の速度ポテンシャル(ただし, 若干の調整が必要: プリント #12 の式(5) にて, $2a \cos \sigma t \rightarrow a$ および $x \rightarrow x'$ と置換)に, 一様流を重ね合わせたものとなっていることがわかる. 各々の流れ成分の流れ関数を重ね合わせるにより, 進行波の流れ関数は, 以下のように得られる.

$$\psi'_p = \frac{ag}{\sigma} \frac{\sinh k(h+y)}{\cosh kh} \cos kx' - Cy \quad (6)$$

4) 進行波の水面波形および海底面は, それぞれ流線の1つであることを確認し, その他の流線を図示せよ.

5) 進行波の複素速度ポテンシャルが, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{W'_p}{iC} = a \frac{\sinh k(h-iz)}{\sinh kh} - z \quad (7)$$

微小振幅波の特性 (4) 浅水変形

1) 同一方向に進行する, 波数の異なる 2 つの波 η_1 および η_2 の合成波 η が次式で与えられることを示せ.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A(x, t) \cos(k_0 x - \sigma_0 t)$$

ただし, ここで議論している諸量は以下のとおりである.

$$A(x, t) = 2a \cos(\Delta k x - \Delta \sigma t); \eta_{j=1,2} = a \cos(k_j x - \sigma_j t); k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k; \sigma_{1,2} = \sigma_0 \pm \Delta \sigma$$

2) 水深 20 m の海で周期 5 s と 6 s の同一方向に進行する 2 つの波の合成波について 時刻 $t = 0$ での波形を範囲 $0 \leq \Delta k x \leq 1.5\pi$ で描け. また, 時刻の変化 ($t = 1, 2, 3, \dots, 50$) に伴う波形の移動も図示せよ.

関数 A (波数 k_0 および角周波数 σ_0 の基本波の振幅関数) の波形を包絡線という. 波形 η_j の伝播速度が σ_j/k_j で表されるのと同様に, 包絡線の伝播速度は $\Delta \sigma/\Delta k$ で表される.

任意の 1 次関数 $f(s)$ を波形とする波 $f(x - vt)$ は, (位相) 速度 v で伝播する. 波の波速は位相速度であり, 英語において, 波速を celerity とよび, いわゆる通常速度 velocity と明確に区別している.

3) 設問 1) において, Δk および $\Delta \sigma$ を微小とすることにより, 波数 k_0 の成分波の包絡線の伝播速度 C_G が次式で表せることを示せ. (ヒント: 波数に対して角周波数が決まるので, 分散関係式を用いる)

$$C_G = \frac{d}{dk} \sigma(k) = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

包絡線の伝播速度 C_G を群速度とよぶ. また, “波の平均エネルギーは群速度で伝播する” ことを数学的に示すこともできる. しかしながら, そのためには, 連続式の誘導 (プリント # 1 の設問 1) で, 質量の流入率を考察) のように, 鉛直断面を通過するエネルギーの流入率を考察しなければならない等, 数学的な準備がさらに必要となる (ので, この議論は別の機会に譲る).

4) 沖波の群速度は, 位相速度の半分となることを示せ.

沖から岸に向かう斜面上を波が伝播する時, 波高が変化する. この現象を浅水変形という. 浅水変形に伴う波高の変化率 K_s (= 沖波の波高 H_0 に対する水深 h の地点での波高 H の比, これを浅水係数とよぶ) は, 群速度を用いて次式で与えられる (この式の誘導も, 別の機会に譲る).

$$K_s \left(= \frac{H}{H_0} \right) = \sqrt{\frac{C_0}{2C_G}}$$

5) 浅水係数 K_s が, 次式のように整理できることを示せ. この式を用いれば, 相対水深 kh に対する浅水係数 K_s の変化を図-6 のように示すことができる.

$$K_s = 1 / \sqrt{\tanh kh + kh(1 - \tanh^2 kh)}$$

6) 周期 14 s の波が入射している. 水深 8 m の地点での波高が 3 m であった時, 沖波の波高はいくらか?

7) 沖波に対する相対水深 $k_0 h$ を用いて 浅水係数 K_s の変化を図示せよ. 図-6 よりも, 本問で得られる図の方が, 現実的な考察に有利である. その理由を説明せよ.

微小振幅波の特性は, 他に, 屈折, 回折, ラジエーション応力などの重要な性質がある. それらは別の機会に紹介する. また, 成分数が無数にある場合も, 式(1)と同じ表現が可能である. 式(1)は不規則波の表現の 1 つとして重要である (が, ここでは, これ以上に立ち入らない)

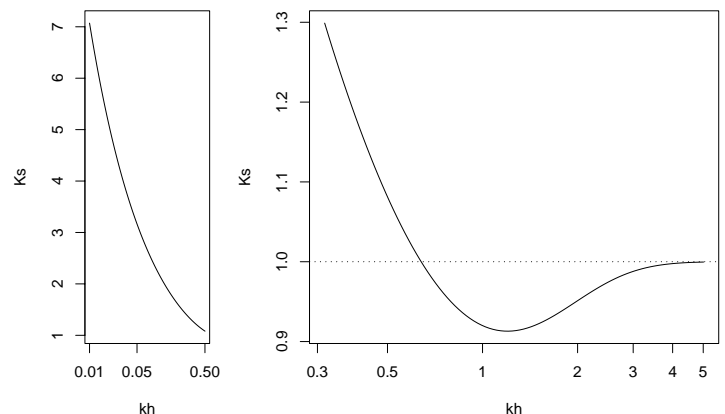


図-6 相対水深による浅水係数の変化

ナビエ・ストークスの運動方程式，層流と乱流

直交座標系におけるナビエ・ストークスの運動方程式は，次式で与えられる．

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

上式は，2次元であれば2つの等号式を，3次元であれば3つの等号式を，1つのベクトル量の等号式として表している． z 軸方向の成分のみを表示すれば，以下のとおりである．

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

この運動方程式は，粘性流体に対して生じるせん断力を考慮して，完全流体の運動方程式を修正したものである．粘性流体では，固体壁に接する水粒子は静止する（ノンスリップ条件）．そのため，固体壁の周辺では，粘性（正確には，分子粘性）の効果により，固体面の法線方向に速度差が生じ，せん断力が働く．次式に示すように（せん断力の向き，流速の向き，勾配をとる軸の向きに注意），せん断力を速度勾配に比例する量として扱うことのできる流体を，ニュートン流体とよび，式(1)は，ニュートン流体（さらに，非圧縮性であるという条件のもとで）の運動方程式である．流れが層流であれば，式(1)を直接解いて得られる流速に意味がある（逆に言えば，乱流の場合，式(1)を解くことに意味がなくなる．乱流の流速は確率的に変動するとみなした方が都合がよい．その場合には，式(1)そのものだけでは解くことはできない）．

$$\text{(1次元流): } \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{(2および3次元流): } \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

上式における比例係数 μ を粘性係数とよび，粘性係数を密度で除したものを動粘性係数 $\nu (= \mu/\rho)$ とよぶ（記号 ν (nu) と y 軸方向の流速の記号 v の区別に注意）．

1) 圧力の勾配が微小領域に内力として働くように，粘性流体では，せん断力の勾配が微小領域に外力として働く．このことにより，オイラーの運動方程式を修正して，式(2)を導け．

（ヒント：非圧縮性流体の連続式を用いて，次式が成立することを示せばよい）

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^2} = \nabla^2 \vec{u} \quad (4)$$

2) 円筒座標系でのナビエ・ストークスの運動方程式について， z 方向（円管の母線方向）の成分は，次式で表せることを示せ．

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

3) 【ハーゲン・ポワズイユ流れ】式(5)を用いて，勾配 θ で傾けた円管（半径 a ）内を母線方向に層流状態で流下する粘性流体の流速分布を求めよ．なお，微分方程式を解くにあたり，必要となる境界条件を整理すること．

4) 前問について，別の解法でも試みよ．すなわち，円管内部の円柱領域（流下方向に微小な長さ Δs をとり，中心軸が円管と一致する半径 $r (< a)$ の円柱に囲まれた領域）に働く力の釣り合いを示し，その微分方程式を解け．

5) ハーゲン・ポワズイユ流れにおける流量および平均流速を求めよ．

6) ハーゲン・ポワズイユ流れにおいて，流れを生じさせるには，円管を傾ける必要はあるか？

7) 中心軸が共通の半径 a の円管と半径 $b (< a)$ の円管にはさまれるドーナツ形の断面をもつ空間に粘性流体が，層流状態で流下している．この流れの流速分布を求めよ．

（なお，前問のような領域に作用する力の釣り合いを考える解法で本問を検討することは困難であり，ナビエ・ストークスの運動方程式による解法が有利である．）

ナビエ・ストークスの運動方程式，層流と乱流（続）

8) 河床勾配 θ である幅の広い矩形断面水路を流れる定常な層流について，流速分布および流量を求めよ．

9) 前問に対して，せん断力の分布を求めよ．

10) 設問7)の別解として，水中内の微小四角形領域に働く力の釣り合いを示し，それを解け．

11)【クエット流れ】2枚の平行板の間を流れる定常な層流を考える．一方の板を空間に固定し，他方の板を速度 U で平面内で移動（ズリ運動）させるとき，流速分布を求めよ．

乱流の平均流についての運動方程式（レイノルズ方程式）は，次式のように表すことができる（ここでは， z 軸方向の成分のみを表示）．

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \rho \overline{w'u'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho \overline{w'v'}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho \overline{w'^2}}{\partial z^2} \right) + \nu \nabla^2 \bar{w} \quad (6)$$

ここで， \bar{a} は a の平均（正確には， \bar{a} を $E(a)$ と記して，アンサンブル平均あるいは集合平均）を意味する．また， $\rho \overline{w'u'}$ などをレイノルズ応力という．なお，式(6)において，平均流の諸量に大文字（ U など）を，乱れ成分の諸量に小文字（したがって，レイノルズ応力を $-\rho \overline{u'v'}$ などと記す）を用いて表す場合もある．

12) レイノルズ方程式の x 軸および y 軸方向の成分を表示せよ．

13) 次式のように，瞬間流速 u_i を平均流速 \bar{u}_i と乱れ成分の流速 u'_i に分解する時，運動量 $u_i u_j$ の平均はどのように表されるか？

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (7)$$

ただし，1次量 u_i の平均は以下のとおりである．

$$E(u_i) = \bar{u}_i \quad (\Leftrightarrow E(u'_i) = 0) \quad (8)$$

厳密な話として，設問12)では2つの平均が登場している．正確には， \bar{a} は時間平均であり， $E(a)$ は集合平均であり，両者は区別される．集合平均を行うことは，現実世界でほとんど不可能である．そのため，集合平均の代わりに，現実世界で実行可能な時間平均を扱う．“集合平均が時間平均に一致するという仮定”をエルゴード仮定という．

14) 式(7)の瞬間流速 u_i をナビエ・ストークスの運動方程式に代入し，方程式の両辺の平均をとることにより，式(6)を導け．

乱流の場合には，せん断力 τ は次式で与えられる．すなわち，層流における（分子粘性の効果による）せん断力（式(3)で表されるもの）に，レイノルズ応力が付加される．

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \rho \overline{u'v'} \quad (9)$$

壁面の近傍を除けば，分子粘性によるせん断力は無視され，レイノルズ応力が卓越すると考えられる．また，流速の変動成分 u' および v' は，平均流の流速勾配に比例する（プラントルの混合距離の仮説）とすれば，

$$\tau \approx -\rho \overline{u'v'} \approx \rho \left(l \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (10)$$

となる．さらに，せん断力を一定値（壁面近傍でのせん断力 τ_0 に等しい）と仮定し，混合距離 l を $l = \kappa y$ とおいて，上式を解くことにより，平均流の流速分布は次式のように得られる．これを対数分布則という．

$$\frac{\bar{u}(y)}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \log y + C \quad (11)$$

ここで， $U_* (= \sqrt{\tau_0/\rho})$ は摩擦速度であり， κ をカルマン定数とよぶ，また， C は定数である．

15) 式(10)から式(11)を導き，流速分布を図示せよ．