この演習では，管路および開水路の１次元流れの演習を既習していることを前提とするが，その復習事項の一部もとりあげている．なお，◆印は水理学的な整理であり，◇印は数学的な背景である．

参考図書：　禰津家久・冨永晃宏 (2000)：水理学，朝倉書店，319p.
鈴木幸一 (1990)：水理学演習，森北出版，205p.
林　泰三 (1996)：基礎水理学，鹿島出版会，310p.
日野幹雄 (1992)：流体力学，朝倉出版，469p.
種子田定俊 (1988)：画像から学ぶ流体力学，朝倉書店，190p.

■ 連続式について（１）

◆ **定常流**に対して，管路（あるいは，**流管**）における各断面での流量 Q は一定であり，各断面での断面積 A および平均流速 V を用いれば，次式が成立する．なお，次式を**連続式**という．

$$Q = AV \tag{1}$$

◆ 非圧縮流体に対する定常な**流れ場**の連続式は，流速成分を $(u, v\ (, w))$ とすれば，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(+ \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \tag{2}$$

と表される．密度 ρ が変化しない流体を**非圧縮流体**という．また，**圧縮流体**の連続式は，次式で表せる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \left(+ \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0 \tag{3}$$

◆ 流れ場に固定した**微小領域**に対し，単位時間内の流入および流出する質量の総和がゼロであることに基づいて，連続式は導かれる．

1） ２次元平面内（３次元としては，奥行きの厚みを単位幅で考えよ）の非圧縮流体の場合を考える．図 -1 に示すような領域 ABCD に対し，各辺での流入（符号を正）あるいは流出（符号を負）する質量は，それぞれどのように表せるか？（まず，ここでは，領域 ABCD を微小として扱わないこと）

辺 AB：$\rho Q_{AB} = \rho \Delta y\, u(x_0)$

辺 BC：

辺 CD：

辺 DA：

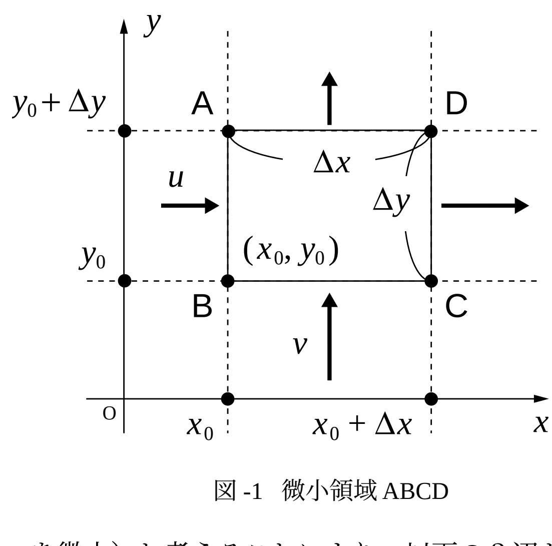

図 -1　微小領域 ABCD

次に，領域 ABCD を微小（すなわち，距離 Δx および Δy を微小）と考えることにより，以下の２辺から流出する質量は，どのように表されるか？（微小であることから，**テーラー展開**により近似する）

辺 CD：

辺 DA：

したがって，流入および流出する質量の総和 M は，どのように表せるか？

$M =$

以上の結果，流入・出量の総和 M を，領域 ABCD に含まれる質量 $\rho \Delta x \Delta y$（＝ この微小量は基本の量であり，ゼロでない！）で除した量がゼロとなることにより，式 (2) が導かれる．

■ 連続式について（1）（続

◆ $x, y\left(, z\right)$ 軸の**単位ベクトル**を $\vec{e}_x, \vec{e}_y\left(, \vec{e}_z\right)$ と記せば，**勾配**を表す**微分ベクトル** ∇ を以下のように定義できる．

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \left(+ \ \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{4}$$

2）式 (4) を用いれば，非圧縮流体の連続式が次式のように表現できることを確認せよ．

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{5}$$

3）圧縮流体の場合も，**1）**と同様に考えて，２次元平面内での直交座標系における連続式を誘導せよ．

（ヒント：テーラー展開に際し，密度と流速を個別に扱うのではなく，
「密度流速」として１つの量として扱うとよい）

◆ **極座標系**（３次元としては，**円筒座標系**）における連続式は，次式で表される．

（圧縮性流体）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r u_r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho u_\theta\right) \right\} \left(+ \ \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u_z\right) \right) = 0 \tag{6}$$

（非圧縮性流体）

$$\frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r u_r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right\} \left(+ \ \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0 \tag{7}$$

なお，直交座標軸 $\left(x, y\right)$ と極座標軸 $\left(r, \theta\right)$ の関係は，以下のとおりである．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

4） 極座標における適した微小領域を描き，その領域に流入および流出する質量を考えることにより，式 (7) を導け．　　（ヒント：テーラー展開に際し，**3）**と類似した考えのもとで行うのがよい）

5）直交座標の流速成分 $\left(u, v\right)$ と極座標の流速成分 $\left(u_r, u_\theta\right)$ の関係は，次式で表される．これを導け．

$$\begin{cases} u = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \\ v = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

6）直交座標の微係数 $\left(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y\right)$ と極座標の微係数 $\left(\partial f/\partial r, \partial f/\partial \theta\right)$ の関係を導け．

7）式(2)で表される直交座標系の連続式に対して，式(9)および前問で得られる関係式を用いることにより，式 (7) の極座標系の連続式を導け．（本問は，流入・流出する質量で議論する**4）**とは異なる議論である）

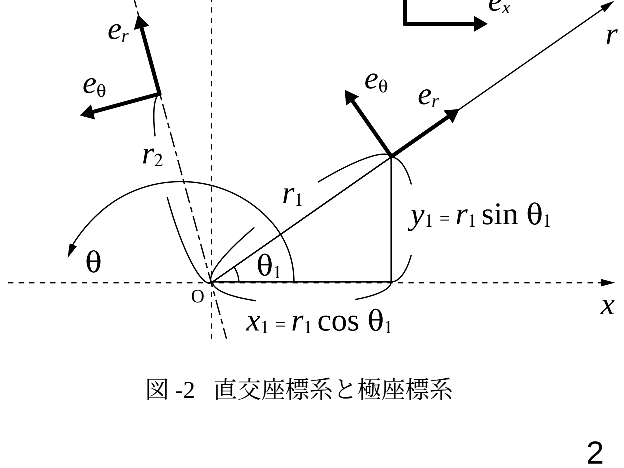

図 -2　直交座標系と極座標系

■ 流線について（1）

流線（streamline）　. . .　各固定点での速度ベクトルに接する曲線　（抽象的＆オイラー的）
流跡線（particle path）　. . .　ある１つの流体粒子の移動経路　（質点力学的＆ラグランジュ的）
流脈（streak line）　. . .　流体粒子が形成する曲線（ある時刻に）　（流れにインクを垂れ流し）
いずれも，**向きのついた曲線**であることに注意．また，定常な流れ場では３者は一致する（非定常な流れでは，一致しない）．

◆ **流線の微分方程式**は，次式のように表せる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u} \quad \text{or} \quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \quad \left(\text{or} \quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \right) \tag{1}$$

◇ 上式の第２式（および第３式）の表現は，流線の理解を助ける．すなわち，流線という曲線は，微小に分割すれば折れ線であり，点 $A=\left(x_0, y_0, z_0\right)$ をとおって，（流速）ベクトル $\left(u, v, w\right)$ に平行な直線の式は，

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w} \tag{2}$$

となることは大学入学以前の既習の知識である．点 A の近傍の点 $\left(x, y, z\right)$ は，微小量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ を用いて，

$$x-x_0=\Delta x, \quad y-y_0=\Delta y, \quad z-z_0=\Delta z \tag{3}$$

と表せる．以上により，式 (1) が流線を表す折れ線（曲線）であることは明白となる．

1）流速ベクトルが次式で与えられる流れ場の流線を求め，図示せよ．

$$\vec{u}=\frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{e}_x+\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{e}_y \tag{4}$$

また，この流れ場は，非圧縮性流体の連続式を満足することを示し，流れの特徴を言葉で表現せよ．

2）流速ベクトルが次式で与えられる流れ場の流線を求め，図示せよ．

$$\vec{u}=a\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

3）直交座標系における流速成分 $\left(u, v\right)$ が次式で与えられる流れ場の流線を求め，図示せよ．

$$\begin{cases} u=-r\,\omega_0 \sin\theta \\ v=\ \ \ r\,\omega_0 \cos\theta \end{cases} \tag{6}$$

◆ **流跡線の微分方程式**は，次式のように表される（X および Y は，x および y ではない！）．

$$\begin{cases} \dfrac{d\,X(t)}{dt}=u \\ \dfrac{d\,Y(t)}{dt}=v \end{cases} \tag{7}$$

4）流速成分が式 (6) で与えられる流れ場の流跡線を求め，図示とともに流れの特徴を言葉で表現せよ．
（これは，**強制渦**とよばれる流れ場であり，非常に重要である．後の議論で再び登場する．）

■ ラグランジュ微分とオイラー微分

◆ ラグランジュ微分とオイラー微分は，以下の関係により結びつけられる．

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \quad \left(+ w\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1}$$

（その１：**テンソル演算**に慣れること）

1）【移流項の運動量的変形】非圧縮流体の流れ場に対し，**移流項**が次式のように変形できることを示せ．

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(u_i u_j \right)}{\partial x_j} \tag{2}$$

（その２：**ベクトル演算**に慣れること）

2）移流項は，微分ベクトル ∇ を用いて，次式のように表せることを確認せよ．

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left(\vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} \tag{3}$$

3）次式で表される**渦度**の各成分を示せ．

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \tag{4}$$

4）【移流項のエネルギー的変形】移流項は，渦度 $\vec{\omega}$ を用いて，次式のように変形できることを示せ．

$$\left(\vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = \nabla K - \vec{u} \times \vec{\omega} \tag{5}$$

なお, K は運動エネルギー（＝ **流速エネルギー**）であり，以下のように定義する．

$$K = \frac{\left| \vec{u} \right|^2}{2} \tag{6}$$

【ベクトル解析の基本公式】

（直交座標系）

$$grad\ \phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{A1}$$

$$div\ \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{A2}$$

$$rot\ \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{A3}$$

（極座標系）

$$grad\ \phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \phi}{r \partial \theta} \end{pmatrix} \tag{B1}$$

$$div\ \vec{u} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r u_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right\} \tag{B2}$$

$$rot\ \vec{u} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r u_\theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right\} \tag{B3}$$

極座標系の公式は, 暗記できるに越したことはないが, 暗記するというより, 導き出せるようになりたい.

5）上の公式群について，式 (A 1 ~ 3) の直交座標系の公式から，式 (B 1 ~ 3) の極座標系の公式を誘導せよ．

■ オイラーの運動方程式

◆ 完全流体の運動方程式（＝ **オイラーの運動方程式**）は，次式のように表される．

$$\left.\begin{aligned}\frac{Du}{Dt}&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{Du}{Dt}&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{Dw}{Dt}&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

なお，**完全流体**とは，**粘性の効果**が無視できる流体のことである．また，**外力** $\vec{F}$ に対して，圧力 $\vec{p}$ は連続体を領域に分割することにより生じる**内力**であり，分割された領域を押す向きを正にとる．したがって，流れの無い**静水状態**では, 圧力は, 外力である**重力**と釣り合い, 深さに比例して正値で増大することになる.

1） １次元の流れ場に対するオイラーの運動方程式は，どのように表されるか？

2） 微分および流速をベクトルで表現すれば，オイラーの運動方程式はどのように表されるか？

3） 重力のみを外力とする１次元定常流れについて，オイラーの運動方程式を積分することにより，ベルヌーイの定理を導け.

4） 3 次元空間における定常な<u>渦なし</u>流れに対して，オイラーの運動方程式を積分（正確には, 線積分）して，次式のベルヌーイの定理を導け．ヒント：プリント＃4 の設問 **4）** で得られる式 (5) を用いよ.

$$\frac{p}{\rho g}+z+\frac{|\vec{u}|^2}{2g}=\mathrm{const.}\qquad(2)$$

◆ 前問における積分は，**線積分**であり，その**積分路**を必ずしも流線とする必要がないことも示すべきである．すなわち，式 (2) の右辺の const．は，<u>全領域に対して定数</u>であることを意味しており，互いに異なる流線上にある２点に対しても，式 (2) を適用できることが特徴である．このことが成立するには，<u>渦なし</u>という条件（＝ 流れがポテンシャル流であること）が必要である．次の問題と対比して理解せよ.

5） 流管において，２つの横断面に作用する力の仕事率や，断面より流入および流出するエネルギーを考察することにより，ベルヌーイの定理を導け（本問は渦度の概念すら現れない＝渦度がゼロでなくても成立）.

6） 静止流体にオイラーの運動方程式を適用することにより，その水中圧力を求めよ.

7） プリント＃1 の図 -1 に示す微小領域 ABCD に働く力の釣り合いを考えることにより，式 (1) を導け.

◆ 極座標系（あるいは，円筒座標系）のオイラーの運動方程式は，次式で表される.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+w\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\ &\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+w\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+u_r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

8） プリント＃4 における式 (B 1 ~ 3) などを用いて，式 (1) で表される直交座標系のオイラーの運動方程式を変形することにより，式 (3) を導け.

■ 連続式および流線について（２） あるいは，速度ポテンシャルの導入

◆ **２次元の渦なし流れ**において，次式が成り立つ．

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

1）ある関数 ϕ の勾配として，速度ベクトル $\vec{u}$ が関係づけられるとしよう．すなわち，流速ベクトル $\vec{u}$（その成分を u および v と記す）が，次式で表せる流れ場を考える．

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \left(\Leftrightarrow \quad \vec{u} = \nabla \phi \right) \tag{2}$$

このような流れ場では，渦度がゼロとなることを確認せよ．

◆ 関数 ϕ を**速度ポテンシャル**とよび，速度ポテンシャルの定義できる流れ（＝渦なし流れ）を**ポテンシャル流**ともいう．なお，上記の議論の逆の議論（渦度がゼロとなる流れ場では，速度ポテンシャルが存在すること）も，数学的に示すことができる（が，ここでは扱わない）．

◆ **２次元の非圧縮性流体の流れ場**では，次式が成り立つ（連続式：プリント＃１の式(2)）．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

2）前問に類似して，ある関数 ψ を用いて，流速成分 u および v が以下のように表わるとしよう．

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

このような流れ場は，非圧縮性流体の連続式が成立することを確認せよ．

◆ 関数 ψ を**流れ関数**とよぶ．なお，前問と同様に，逆の議論（非圧縮性流体であれば，流れ関数が存在すること）も数学的に示すことができる（が，ここでは扱わない）．

以上により，**２次元の非圧縮性流体の渦なし流れ**については，以下の関係が成立する．

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

このとき，次式で表せる**複素速度ポテンシャル** W が導入できる（２次元に限ることに注意）．

$$W = \phi \ + \ i \, \psi \tag{6}$$

◇ *なぜ，複素数として扱うのだろうか？*　式(5)の関係は，数学的には**コーシー・リーマンの関係**とよばれ，**複素関数の正則条件**（端的にいえば，微分可能条件）となっている．微分可能とは，微係数が意味をもつことであり，１変数関数であれば，右からと左からの微係数が一致することに相当する．

$$\frac{df}{dx_-} \left(= \lim \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) = \frac{df}{dx_+} \left(= \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \tag{7}$$

複素変数の場合には，右からと左からの他に，四方八方からの微係数が一致しなければならない．したがって，次式が必要条件となる．次式を展開すれば，式(5)の関係は得られる．

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{d(iy)} \tag{8}$$

以上は冒頭の「なぜ」に対する直接的な答えではない．その答えとして，コーシー・リーマンの関係を１つの例に，複素関数は数学的に十分に整備されているからである，といえるのかもしれない．複素関数の顕著な特性について，もう１つの例を後にとりあげる．

■ 連続式および流線について（２） あるいは，速度ポテンシャルの導入 （続

３） 速度ポテンシャル ϕ が次式で与えられる流れ場について，その特性を述べよ．また，流線を描け．なお， m は実数の定数であり，その符号により場合分けを行うこと．

$$\phi = m\log\left(x^2+y^2\right) \tag{9}$$

４） 速度ポテンシャル ϕ が，次式の**ラプラス方程式**を満足することを確認せよ．

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{10}$$

５） 前問と同様に，流れ関数 ψ がラプラス方程式を満たすことを確認せよ．

６） 流れ関数 ψ が定数となる曲線が，流線となることを示せ．

（ヒント：流線上では，流れ関数の値が変化しない（一定）であることを示せばよい）

７） 流線と等ポテンシャル線が**直交**することを示せ．

（ヒント：曲線が直交するとは，交点における接ベクトルが直交するということである）

８） 平面内の非圧縮性流体の流れ場において，異なる２点（点 A および点 B ）の間を結ぶ曲線を横切って流入（あるいは，流出）する流量 Q は，次式のように，流れ関数の差で与えられることを示せ．

$$Q = \psi(B)-\psi(A) \tag{11}$$

９） 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について，流線を描け．

$$W = z \tag{12}$$

１０） 第１**象限**において，複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場の流線を描け．

$$W = z^2 \tag{13}$$

１１） 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について，流線を描け．

$$W = \frac{2}{z} \tag{14}$$

◇ 関数としての**ゼロ次のベキ**は，どのように定義できるか？（数としてのゼロ時のベキを， $a^0\equiv 1$ と定義することは，大学入学以前の知識ですね．次式に見るように，関数のゼロ次のベキは対数関数として，その性質を検討できる．なお，このようなベキ関数の性質は，他の分野でも用いられる． ex. Box-Cox 変換）

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} = \log x \tag{15}$$

１２） 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる２つの流れ場 $a)$ および $b)$ について，それぞれの流線を描け．なお，定数 c および x_0 は実数である．

$$a)\quad W = c\log z \tag{16}$$

$$b)\quad W = \log\frac{z+x_0}{z-x_0} \tag{17}$$

◆ 流れ場 $b)$ は，流れ場 $a)$ の定数 c を ± 1 とし，それぞれの原点を $x_0 \pm i0$ に移動した２つの流れ場を重ね合わせたものである．ラプラス方程式は**線形な微分方程式**であるので，流れ場の**重ね合わせ**が可能．

◆ 流れ場 $a)$ をわき出し（ $c>0$ ）／吸い込み（ $c<0$ ）といい，極限 $x_0\to 0$ により，流れ場 $b)$ は式 (14) の流れ場に**漸近**し，式 (14) で表される流れ場を**二重わき出し**という．式 (12) の流れ場は**一様流**という．

１３） 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について流線を描け．なお，これを**自由渦**という．

$$W = -i\log z \tag{18}$$

■ 連続式および流線について（２） あるいは，速度ポテンシャルの導入 （続

１４）極座標での流速成分 u_r および u_θ が次式で与えられる流れ場を，ポテンシャル流かどうかを判定した上で，流線を描け．なお，この渦を**強制渦**という．

$$u_r = 0, \quad u_\theta = r\omega \tag{19}$$

１５） 円筒座標系での流速成分が, 次式のように強制渦と自由渦を組み合わせて表される渦を**ランキン渦**という．この渦について，a) ~ b) の設問に答えよ．

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} r\omega & (0 \le r \le a) \\ A/r & (a \le r \le \infty) \end{cases} \tag{20}$$

a) 強制渦と自由渦の境界面において，流速は連続的に変化すべきであるという条件により，定数 ω および A の関係を求めよ．

b) 原点での水深を h_0 と表す時，強制渦の領域における任意点での水深 $h_1(x)$ を導け．

c) 無限遠点での水深を h_∞ と表す時，自由渦の領域における任意点での水深 $h_2(x)$ を導け．

（ヒント：ベルヌーイの定理を適用せよ．ただし，適用の理由を言及すべき．b) では適用できないことと対比せよ）

d) 無限遠点に対する渦中心での水位の低下量 Δh を渦の角速度 ω を用いて表せ．

１６）【隅部の流れ】 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について, 流れの領域を適切に限定した上で，流線を描け．なお，定数 A を適切な複素数で与えよ．$n = 2, 1, -1$ の場合については，設問**９）**，**１０）**，**１１）**で既に検討済みである．

$$W = Az^n \quad \left(n = 3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}, -2, -3, \text{etc} \right) \tag{21}$$

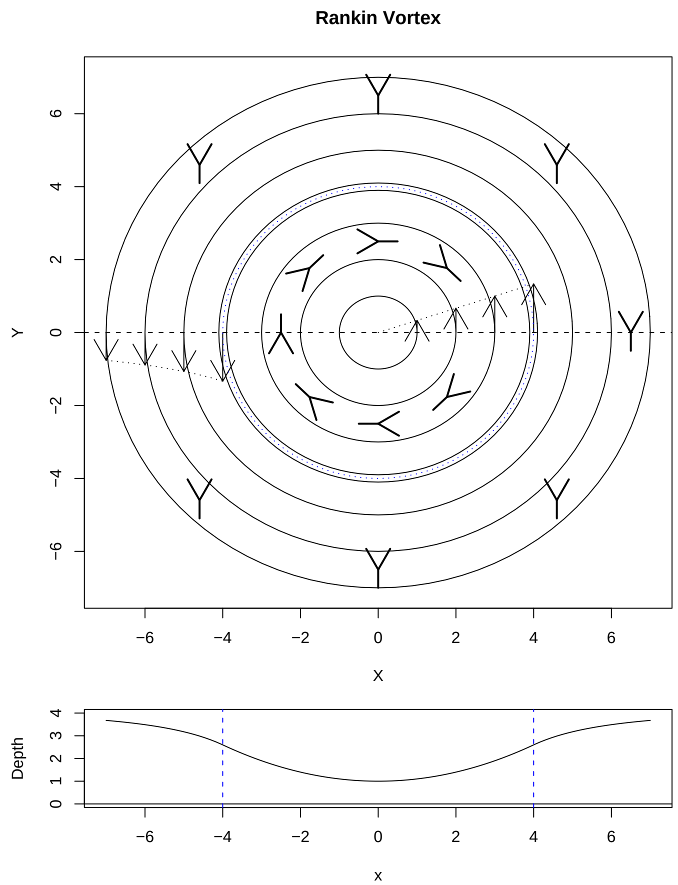

図 -3 ランキン渦（水平断面：上図， 鉛直断面：下図）
領域：$|x| \le 4$ で強制渦，領域：$|x| \ge 4$ で自由渦である．それぞれの渦に浮かべた文字 Y の運動に注目せよ！

■ 連続式および流線について（２） あるいは，速度ポテンシャルの導入 （続

１８）【円柱周りの流れ】 複素速度ポテンシャルが次式で与えられる流れ場の流線を描け（U_∞ は実数の定数）. また, 原点を中心とする半径 a の円が流線の１つとなっていることを確認できることから, 式(22) で表される流れ場は，円柱周りのものと考えることができる.

$$W = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \tag{22}$$

（式 (22) の流れ場は， ２重わき出しと一様流を重ね合わせた流れであるといえる）

１９）前問において，円柱表面と実数軸が交わる２点 $z = \pm a + i0$ でよどみ点となっていることを確認せよ. なお，**よどみ点**とは速度ゼロとなる点である.

２０）設問**１８）**において，円柱表面の各点での圧力を求めよ.

２１）【ダランベールのパラドックス】 前問で得られる圧力分布を円柱表面全体で積分することにより，円柱に作用する全抵抗力を求めよ.

（完全流体では, 物体に作用する抵抗力の総和がゼロとなる！
現実の経験とは異なる点で，**パラドックス**といえる）

２２）【マグナス効果＝消える魔球？】 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について，流線を描け．なお，実数定数 a , U および γ について， $aU/\gamma = 1$ を境に３とおりに場合分けを行う必要がある．その理由を述べよ.

$$W = U\left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i}{2}\gamma \log z \tag{23}$$

２３）【カルマン渦列】 複素速度ポテンシャル W が次式で与えられる流れ場について，流線を描け.

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{b}\left(z - \frac{ia}{2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{b}\left(z - x_0 + \frac{ia}{2} \right) \tag{24}$$

ここで, a, b, x_0, Γ は実数定数である．また， $x_0 = b/2$ および $\cosh(\pi a/b) = \sqrt{2}$ という特別の場合のみが定常流として**安定**に存在できる（残りの場合には，流れが**不安定**であり，なんらかの擾乱を受けると流れがもとの状態に戻らない）ことを数学的に示すこともできる（が，ここでは扱わない）.

以下の図は，プリント # 11 での議論で用いる.

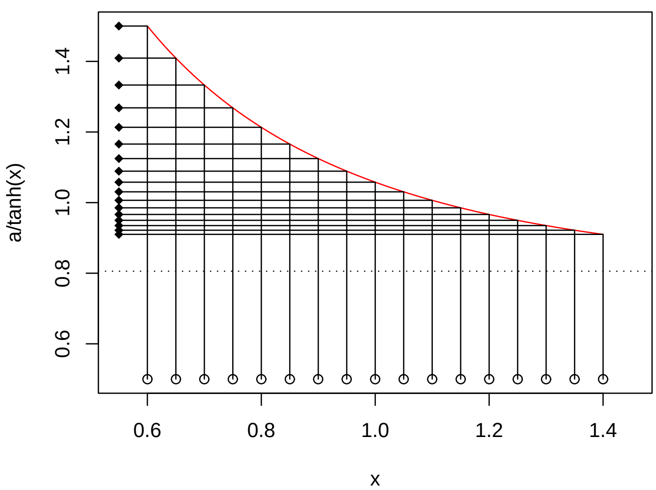

図 -4 縮小変換： $x \to a/\tanh x$

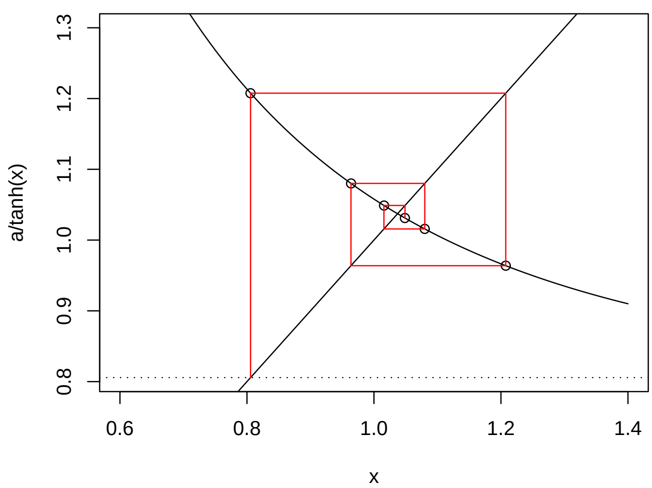

図 -5 不動点定理による解法の図示